Mødet den 23de November.

Hr. Geheime-Etatsraad *Andræ* meddeelte følgende: „*Udvidelse af en af Laplace i Mécanique céleste angivet Methode for Bestemmelsen af en ubekjendt Størrelse ved givne umiddelbare Iagttagelser.*"

Af alle de Problemer, der fremstaae, hvor ubekjendte Størrelser skulle bestemmes ved givne Iagttagelser, er det simpleste upaatvivleligt det, hvor een og samme Ubekjendte umiddelbart er Gjenstand for samtlige Iagttagelser, og hvor disse alle ere foretagne med samme Nøiagtighed. I dette Tilfælde afgiver Iagttagelsernes arithmetiske Middeltal en naturlig Løsning, hvis Rigtighed endogsaa er forekommet Mange saa indlysende, at man ikke sjeldent har troet at kunne opstille den som Axiom. Ved det første Forsøg paa at give de mindste Quadraters Methode en videnskabelig Begrundelse har *Gauss* saaledes, i 2den Bog af »Theoria motus corporum coelestium», netop støttet Udviklingen paa dette Axiom, og det er først langt senere, at han i »Theoria combinationis observationum minimis erroribus obnoxiae» slog ind paa en fuldkommen forskjellig Vei, hvorved han ganske opgav den tidligere Betragtningsmaade. Naar man alene fastholder den sædvanlige Forudsætning for Behandlingen af Problemer af denne Art, den nemlig, at positive og negative Feil af samme Størrelse have samme Sandsynlighed, saa maa det ved en nærmere Overveielse vistnok ogsaa erkjendes, at Alt, hvad der tør paastaaes umiddelbart at være indlysende, indskrænker sig til, at det arithmetiske Middeltal afgiver en Approximation, hvis Nøiagtighed ubegrændset stiger med Antallet af Iagttagelser. Men utallige Functioner af Iagttagelserne kunne være i Besiddelse af denne Egenskab, og det er først en dybere gaaende, paa en Fastsættelse af selve Feilloven støttet, Undersøgelse, der gjør det muligt at fælde en afgjørende Dom om deres gjensidige Nøiagtighed. Uagtet det nu herved viser sig, at det kun er Antagelsen af den almindelige, exponentielle Feillov, der blandt alle mulige Bestemmelsesmaader gjør det arithmetiske Middeltal til den relativ skarpeste, saa maa det dog indrømmes, at Middeltallet under alle Omstændigheder har, i reen praktisk Henseende, et afgjort Fortrin fremfor alle andre Functionsformer, der, som mere sammensatte, let ved Anvendelsen lede til besværlige, og ved et betydeligere Antal af Iagttagelser neppe udførlige Regninger. Dette Fortrin tabes imidlertid, naar man søger Løsningen paa en anden Vei, hvorved man ganske opgiver at bestemme den Ubekjendte som Function af samtlige foreliggende Iagttagelser. Og at dette er muligt indsees overmaade let. Forestiller man sig nemlig alle Iagttagelser ordnede efter deres Størrelse i en fortløbende Række fra de mindste til de største, saa er det klart, at den sande Værdi maa søges i Rækkens Midte, og at selve den Størrelse, der netop halverer Rækken, altsaa det midterste Led, hvor Antallet af Led er ulige, eller et Medium af de to midterste, hvor Antallet er lige, maa afgive en Approximation, hvis Nøiagtighed ogsaa her maa uafbrudt voxe med Antallet af Leddene. Der fremstaaer da saaledes en Bestemmelsesmaade, som giver den Ubekjendte med en høist mærkelig Lethed, der især bliver følelig, hvor Mængden af de foreliggende Iagttagelser er overmaade stor, og hvor selve Iagttagelserne fremtræde ordnede i Grupper efter deres forskjellige Størrelse. Men hvad der dog fremfor Alt fortjener at fremhæves er den Omstændighed, at man her slet ikke benytter Værdierne af alle de enkelte Iagttagelser, idet man kun behøver at vide, hvormange af disse, der ligge over eller under givne Grændser. Der vil derfor ogsaa kunne forekomme Forhold, hvor man ved en Anvendelse af den antydede

Fremgangsmaade ikke blot erholder den simpleste, men tillige den eneste mulige Bestemmelse af den Ubekjendte, og det er netop et Tilfælde af denne Art, der for en Række af Aar tilbage først ledede mig ind paa nærværende Undersøgelse*), og som nu atter bringer mig til paany at beskjæftige mig med den.

Uagtet den omhandlede Methode vistnok maa synes at have et ikke ganske ringe Krav paa Opmærksomhed, saa kan en saadan dog hidtil neppe siges i nogen synderlig Grad at være blevet den til Deel. Den er imidlertid saa langt fra at være ny, at den snarere, skjøndt støttet paa en væsentlig forskjellig Opfattelse, maa henregnes til de ældste, og i hvert Fald er betydeligt ældre end de mindste Quadraters Methode. Det var allerede en af *Boscovich* fremsat Idee, at man ved Udledelsen af Værdierne for et System af Elementer skulde søge en Løsning for Opgaven ved at fastsætte som Betingelse, at Summen af de resterende Feils numeriske Værdier blev et Minimum. Denne Idee optoges og udvikledes af *Laplace* i 3die Bog af Mécanique céleste, som alt udkom i 1799, eller fulde 7 Aar forinden *Legendre* for første Gang i »Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes« bragte de mindste Quadraters Methode i Forslag. *Laplace* viser udførligt hvorledes den stillede Betingelse for Systemer med eet Element fører hen til at ordne samtlige Betingelsesligninger i en fortløbende Række efter den Størrelse, de hver for sig tillægge Elementet, hvornæst man da i denne Række let finder Pladsen for den Ligning, som udelukkende maa tjene til Bestemmelse af den Ubekjendte. Forudsætter man i samtlige Ligninger Elementets Coefficienter reducerede til Eenheden, eller, hvad der er det samme, forudsætter man den Ubekjendte umiddelbart iagttaget, saa bliver Pladsen, der skal vælges, netop den midterste, og Methoden falder da fuldstændigt sammen med den ovenfor antydede, ligesom det omvendt er let at indsee, at Bestemmelsen ved denne

*) See 1. Bind af det Medicinske Selskabs Skrifter pag. 256 ff. Kbhvn 1848.

nødvendigviis medfører, at Feilenes numeriske Sum bliver et Minimum. Langt senere har *Laplace* atter i en særskilt Afhandling, der er trykt som Supplement til »Théorie analytique des probabilités«, gjenoptaget den tidligere Undersøgelse og efterviist, hvorledes man kan bestemme Nøiagtigheden for det fundne Element. Uagtet han klart har betegnet Methodens charakteristiske Eiendommelighed ved at tillægge den Benævnelsen »Méthode de situation«, saa fastholder han dog endnu stedse den, som det synes uvæsentlige, Egenskab, der i det af ham betragtede specielle Tilfælde medfører en Opfyldelse af Betingelsen for Feilsummens Minimum. I denne Omstændighed tør man maaskee søge Grunden til, at han ikke har givet Methoden den Udvidelse, som den med Lethed vil kunne modtage, naar man, med Tilsidesættelse af den nævnte Betingelse, kun bevarer den charakteristiske Bestemmelse af den Ubekjendte ved en Deling af den ordnede Iagttagelsesrække. Det er en saadan Udvidelse af *Laplaces* »Méthode de situation«, som nærværende Meddelelse tilsigter at give.

§ 1.

Lad H betegne den Ubekjendte, af hvilken der foreligger et Antal af n lige nøiagtige Iagttagelser, som vi ville forudsætte ordnede efter deres Størrelse i en fortløbende Række fra de mindste til de største. Med h skal endvidere være betegnet en Værdi, der deler Rækken saaledes i tvende Dele, at den første omfatter de m mindste Iagttagelser, der alle ere mindre end h, medens den anden Deel indeholder Resten, eller de $n-m$ Iagttagelser, der ere større end h. Naar nu f er Feilen, der svarer til h, saa vil selve H være bestemt ved Ligningen:

$$H = h - f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

og kan saaledes betragtes som bekjendt, naar f er bekjendt. Men til Bestemmelsen af f maa det tjene, at der ifølge de nys gjorte Forudsætninger af n indtrufne Feil ere m, som ere mindre, og $n-m$, som ere større end f. Udtrykkes Feilloven for de betragtede Iagttagelser ved $\varphi(f)$, saa vil Sandsynligheden p for Feil mindre end f være given ved Ligningen:

$$p = \int_{-\infty}^{f} \varphi(f)\, df \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

der omvendt medfører:

$$f = \psi(p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

hvor den med ψ betegnede Functionsform maa udledes af $\varphi(f)$, og hvor man tillige ved Bestemmelsen af f maa for p anvende den umiddelbart af Iagttagelserne uddragne Sandsynlighed $\frac{m}{n}$, som giver:

$$\left.\begin{aligned} f &= \psi\left(\tfrac{m}{n}\right) \\ H &= h - \psi\left(\tfrac{m}{n}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Da man for alle Feillove, der tilfredsstille Betingelsen: $\varphi(f) = \varphi(-f)$, stedse vil have:

$$\int_{-\infty}^{0} \varphi(f)\, df = \tfrac{1}{2}$$

og følgelig:

$$\psi\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0,$$

saa vil man ogsaa stedse, naar h deler Rækken i dens Midte, eller, hvad der er det samme, naar $m = \frac{1}{2} n$, have $H = h$.

Det kan ligeledes bemærkes, at man stedse har:

$$\int_{-\infty}^{f} \varphi(f)\, df + \int_{-\infty}^{-f} \varphi(f)\, df = \int_{-\infty}^{f} \varphi(f)\, df + \int_{f}^{+\infty} \varphi(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(f)\, df = 1$$

Ere derfor m_1 og m_2 tvende Værdier af m, der opfylde Betingelsen $m_1 + m_2 = n$, eller $\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = 1$, saa ville de tilsvarende Værdier f_1 og f_2 for f være saaledes bestemte, at man har $f_2 = -f_1$. Ligningerne: $H = h_1 - f_1$ og $H = h_2 - f_2$ give da ved Addition: $H = \frac{h_1 + h_2}{2}$.

§ 2.

Forinden der gjøres nogen videre gaaende Anvendelse af den ved (4) givne almindelige Bestemmelse af H, vil det være hensigtsmæssigt først at undersøge denne Løsnings Nøiagtighed. For det specielle Tilfælde, hvor man har $m = \frac{1}{2} n$ og $H = h$, er Undersøgelsen fuldstændigt gjennemført af *Laplace* i den ovenfor berørte Afhandling (Deuxième supplément à la théorie analytique des probabilités), og det vil heller ikke være vanskeligt at give den der benyttede Analyse en saadan Modification, at den ogsaa bliver anvendelig for en hvilkensomhelst anden Værdi af m. Det er dette vi nu skulle vise:

Sandsynligheden for Feilen x ved Bestemmelsen af H er aabenbart den samme som Sandsynligheden for Feilen $-x$ ved Udledelsen af den til h svarende Værdi af f. Men den foreliggende Iagttagelsesrække viser umiddelbart, at der af n Feil ere m, som ere mindre, og $n-m$, som ere større end den Feil, der svarer til h. Den omhandlede Sandsynlighed bliver følgelig proportional med den sammensatte Sandsynlighed for et Feilsystem af n Feil, hvoraf de m ere mindre og de $n-m$ større end $f+x$. At en enkelt Feil er mindre end $f+x$ har Sandsynligheden:

$$\int_{-\infty}^{f+x}\varphi(f)\,df = \int_{-\infty}^{f}\varphi(f)\,df + \int_{f}^{f+x}\varphi(f)\,df = \frac{m}{n} + \varphi(f)\,.\,x + \tfrac{1}{2}\,\varphi'(f)\,.\,x^2$$

idet vi her standse Rækkeudviklingen med Leddene af 2den Orden. Paa lignende Maade erholdes Sandsynligheden for en Feil større end $f+x$ ved:

$$1 - \int_{-\infty}^{f+x}\varphi(f)\,df = \frac{n-m}{n} - \varphi(f)\,.\,x - \tfrac{1}{2}\,\varphi'(f)\,.\,x^2$$

og den søgte sammensatte Sandsynlighed bliver saaledes:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^m . \left(\frac{n-m}{n}\right)^{n-m} . \left\{1 + \frac{n}{m}\,\varphi(f)\,.\,x + \tfrac{1}{2}\,\frac{n}{m}\,\varphi'(f)\,.\,x^2\right\}^m$$
$$.\left\{1 - \frac{n}{n-m}\,\varphi(f)\,.\,x - \tfrac{1}{2}\,\frac{n}{n-m}\,\varphi'(f)\,.\,x^2\right\}^{n-m}$$

Denne Størrelse fremstilles langt simplere ved dens naturlige Logarithme. Standser man ogsaa her Rækkeudviklingen med Leddene af 2den Orden vil nemlig Logarithmen af den förste variable Factor reduceres til:

$$n\,\varphi(f)\,.\,x + \tfrac{1}{2}\,n\,\varphi'(f)\,.\,x^2 - \frac{(n\,\varphi(f)\,.\,x)^2}{2\,m}$$

og ligeledes Logarithmen af den anden Factor til:

$$-n\,\varphi(f)\,.\,x - \tfrac{1}{2}\,n\,\varphi'(f)\,.\,x^2 - \frac{(n\,\varphi(f)\,.\,x)^2}{2\,(n-m)}$$

Den hele Logarithme bliver saaledes en Sum af en Constant og af den variable Størrelse:

$$-\frac{n^3\,\varphi^2(f)}{2m\,(n-m)}\,x^2$$

og selve Sandsynligheden proportional med: $e^{-\frac{n^3\,\varphi^2(f)}{2m\,(n-m)}\,x^2}$

Det sees heraf, at den almindelige exponentielle Feillov er gjældende for de Feil, der fremstaae ved Anvendelsen af (4), og at man tillige, naar den sandsynlige Feil for H betegnes med R, til Bestemmelsen af R erholder Ligningen:

$$\frac{n^3\,\varphi^2(f)}{2m\,(n-m)} = \frac{\varrho^2}{R^2}$$

der giver:

$$R = \frac{\varrho}{n\,\varphi(f)}\sqrt{\frac{2m\,(n-m)}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

hvor ϱ er den bekjendte Constante: 0,4769 ....

Naar m i Udtrykket for R bevæger sig voxende fra 0 til $\frac{1}{2}\,n$ vil Factoren: $\sqrt{2m\,(n-m)}$ bestandigt blive større og større, idet den ved sidstnævnte Værdi opnaaer sit Maximum $\frac{n}{\sqrt{2}}$. I Regelen vil imidlertid den i Brøkens Nævner forekommende Factor $\varphi(f)$ voxe endnu stærkere og ligeledes opnaae et Maximum ved $m = \frac{1}{2}\,n$, der giver $f = 0$, saaledes at man ved alle sædvanlige Feillove erholder et Minimum for R ved $f = 0$, der giver:

$$R = \frac{\varrho}{\varphi(0)\sqrt{2n}}$$

Hvorvidt denne Feil er mindre eller større end den sandsynlige Feil, der knytter sig til Bestemmelsen af H ved Iagttagelsernes arithmetiske Middeltal, lader sig kun afgjøre, naar $\varphi(f)$ er bekjendt. Det vil saaledes ene og alene afhænge af Feillovens Beskaffenhed om den her behandlede »Situationsmethode» giver skarpere, eller mindre skarpe Resultater end den sædvanlige. Er den almindelige Feillov gjældende for selve

Iagttagelserne, altsaa $\varphi(f) = \frac{\varrho}{r\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\varrho^2 f^2}{r^2}}$ og $\varphi(0) = \frac{\varrho}{r\sqrt{\pi}}$, bliver $R = \frac{r}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Da den sandsynlige Feil paa Middeltallet af n Iagttagelser kun er $\frac{r}{\sqrt{n}}$, saa vil i dette Tilfælde Situationsmethoden staae noget tilbage med Hensyn til Resultatets Nøiagtighed.

§ 3.

Ved Udviklingen af Ligning (5) kan man iøvrigt støtte sig paa heelt forskjellige Betragtninger og med megen Fordeel benytte en bekjendt Sætning af Probabilitetsregningen. Der fremstaaer herved en Udledelsesmaade, som ikke blot i og for sig er langt simplere end den ovenfor anvendte, men som ogsaa ganske særligt fortjener at fremhæves, fordi den i en væsentlig Grad letter alle paafølgende Undersøgelser.

Naar H bestemmes ved (4) er det nemlig aabenbart, at Feilen paa H alene fremkommer derved, at man istedetfor den ubekjendte Sandsynlighed p anvender den ved Iagttagelserne givne approximative Værdi $\frac{m}{n}$. Er $\frac{m}{n} + u$ den sande Værdi af p, saa vil:

$$h - \psi\left(\frac{m}{n} + u\right) = h - f - \psi'\left(\frac{m}{n}\right) . u = h - f - \frac{u}{\varphi(f)}$$

være den sande Værdi af H, og $\frac{u}{\varphi(f)}$ er da saaledes Feilen paa H. Men nu er det en bekjendt Sætning, at naar p betegner den ubekjendte Chance for en Indtræden af Begivenheden A, og naar A i et Antal af n Tilfælde virkeligt er indtraadt m Gange, saa vil $\frac{m}{n}$ være en approximativ Værdi for p, og Sandsynligheden for den dertil knyttede Feil u vil da, med Udeladelse af Led, der ere af Ordenen $\frac{1}{\sqrt{n}}$, være proportional med Størrelsen:

$$e^{-\frac{n^3 u^2}{2m(n-m)}}$$

hvilket medfører, at selve den sandsynlige Feil for p bliver:

$$\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n}} = \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\sqrt{2\left(\frac{m}{n}\right)\left(1-\frac{m}{n}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Betragtes en Indtræden af Feil, som ere mindre end Feilen, der svarer til h, som en Indtræden af Begivenheden A, saa vil en Anvendelse af denne Sætning umiddelbart give Ligningen:

$$R = \frac{\varrho}{n\,\varphi(f)}\sqrt{\frac{2m\,(n-m)}{n}}$$

idet Forholdet mellem Feilen paa H og Feilen paa p er bestemt ved Factoren $\frac{1}{\varphi(f)}$.

§ 4.

Anvendelsen af (4) forudsætter stedse, med Undtagelse af det specielle Tilfælde, hvor man har $m = \frac{1}{2}n$ og $H = h$, at Feilloven $\varphi(f)$ er fuldstændigt bekjendt. Man maa saaledes ikke blot have givet Formen for $\varphi(f)$, men tillige den i samme indtrædende Constante, thi det er indlysende, at en hvilkensomhelst Feillov maa henføre de forskjellige Feil til en eller anden af den givne Iagttagelsesmaade afhængig Størrelse, der ogsaa maa indtræde i (3) og (4). Denne Constant kan vel tænkes udtrykt paa mange Maader, men simplest og naturligst vil den dog fremstilles ved Værdien af en charakteristisk Feil, og i det Følgende ville vi derfor stedse antage den at være de givne Iagttagelsers sandsynlige Feil, som vi betegne med r. Da nu r i de hyppigst forekommende Tilfælde ikke forud kan være given, vil man i Almindelighed have 2 Ubekjendte H og r, til hvis Bestemmelse der fordres mindst 2 Ligninger, svarende til 2 forskjellige Delinger af Iagttagelsesrækken. Men det er aabenbart, at de søgte Størrelsers Nøiagtighed uafbrudt voxer med Antallet af de anvendte Ligninger, og det almindelige Problem, der bliver at behandle, maa saaledes angaae Bestemmelsen af H og r ved et hvilketsomhelst Antal Delinger af Rækken.

Ombytter man i (4) Værdien $\frac{m}{n}$ for p med $\frac{m}{n} + u$, saa vil denne Ligning modtage Formen:

$$H = h - \psi\left(\frac{m}{n} + u\right) = h - \psi\left(\frac{m}{n}\right) - \psi'\left(\frac{m}{n}\right).\,u = h - f - \frac{u}{\varphi(f)}$$

eller bedre:

$$u = \varphi(f)\,\{h - H - f\}$$

og betegnes nu, ved et hvilketsomhelst Antal Delinger, de forskjellige Værdier af h med h_1, h_2, h_3, h_4 .... og de tilsvarende Værdier af m, f og u med tilsvarende Mærker, saa fremstaae til Bestemmelsen af H og r de efterfølgende Ligninger:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \varphi(f_1)\,\{h_1 - H - f_1\} \\ u_2 = \varphi(f_2)\,\{h_2 - H - f_2\} \\ u_3 = \varphi(f_3)\,\{h_3 - H - f_3\} \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ \text{hvor: } f_1 = \psi\left(\frac{m_1}{n}\right);\ f_2 = \psi\left(\frac{m_2}{n}\right);\ f_3 = \psi\left(\frac{m_3}{n}\right) \ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

Indføres i disse paa sædvanlig Maade for H og r Værdierne:

$$H = H_0 + x\,; \quad r = r_0 + y$$

idet H_0 og r_0 antages saa nær ved H og r, at høiere Potentser af de ubekjendte Elementer x og y kunne bortkastes, saa giver Udviklingen af Ligningerne (7) Systemet:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = k_1 + a_1 x + b_1 y \\ u_2 = k_2 + a_2 x + b_2 y \\ u_3 = k_3 + a_3 x + b_3 y \\ \ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Kunde man her betragte Feilene u_1, u_2, u_3 .... som fuldkomment uafhængige af hverandre, saaledes som de t. Ex. utvivlsomt vilde være det, dersom de forskjellige Ligninger hidrørte fra forskjellige Iagttagelsesrækker, saa maatte Opgaven ogsaa nu kunne ansees som fuldstændigt løst. Da Feilene ere underkastede den almindelige Feillov vilde man nemlig under alle Omstændigheder, og hvordan man end stiller sig med Hensyn til Begrundelsen af de mindste Quadraters Methode, kunne anvende den ved Udjevningen af Systemet (8), idet Ligningernes forskjellige Vægte, der ere omvendt proportionale med Quadraterne af de tilsvarende sandsynlige Feil, med Lethed findes ved Hjælp af Formel (6). Men ganske anderledes forholder Sagen sig, naar samtlige Ligninger hidrøre fra een og samme Iagttagelsesrække, hvilket netop i nærværende Tilfælde maa forudsættes, thi man vil da ved en nøiere Overveielse let bringes til at erkjende, at u_1, u_2, u_3 .... alle ere saaledes forbundne med hverandre, at den ene af disse Størrelser nødvendigviis maa indvirke paa Bestemmelsen af den anden. Forestiller man sig t. Ex. den første Deling af Rækken som svarende til m_1, den anden til m_2, saa maa denne anden Deling ogsaa opfattes som frembragt derved, at man til de første m_1 Iagttagelser endnu har føiet $m_2 - m_1$ nye. Feilen u_2 vil derfor hidrøre, deels fra u_1, deels fra en ny ved Tilføielsen af de $m_2 - m_1$ nye Iagttagelser foranlediget Feil, og ganske paa lignende Maade ville ogsaa Feilene u_3, u_4 .... deels hidrøre fra alle de foregaaende Feil, deels fra en sidste ny Feil, der fremstaaer ved Tilføielsen af den sidste Gruppe Iagttagelser, hvis Antal successive bliver $m_3 - m_2$, $m_4 - m_3$ o. s. v. Til fuldstændig Tydeliggjørelse af de herved frembragte Vanskeligheder og af den Fremgangsmaade, som maa anvendes for at fjerne dem, ville vi, forinden der skrides til Løsningen af Problemet i dets hele Almindelighed, først udførligt gjennemgaae et specielt og meget simpelt Tilfælde.

§ 5.

Lad den forelagte Række være deelt i 4 ligestore Dele ved Værdierne:

$$m_1 = \tfrac{1}{4} n\,; \quad m_2 = \tfrac{1}{2} n\,; \quad m_3 = \tfrac{3}{4} n$$

Da man for alle Feillove vil have:

$$\psi(\tfrac{1}{4}) = -r\,; \quad \psi(\tfrac{1}{2}) = o\,; \quad \psi(\tfrac{3}{4}) = r$$

saa blive her Ligningerne (7), idet $\varphi(-r) = \varphi(r)$:

$$u_1 = \varphi(r)\,\{h_1 - H + r\}$$
$$u_2 = \varphi(o)\,\{h_2 - H\}$$
$$u_3 = \varphi(r)\,\{h_3 - H - r\}$$

Sættes nu $H_0 = h_2$, $r_0 = \frac{h_3 - h_1}{2}$, og indføres til Forkortelse endvidere følgende Betegnelser:

$$\varphi(r) = a; \quad \varphi(o) = b; \quad \Delta = \frac{h_3 + h_1}{2} - h_2$$

saa erholdes Systemet (8) udtrykt ved:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= a\Delta - ax + ay \\ u_2 &= \quad\;\; - bx \\ u_3 &= a\Delta - ax - ay \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

hvor det nu først og fremmest kommer an paa, istedetfor u_1, u_2 og u_3 at indføre andre indbyrdes uafhængige Feil, som skulle betegnes med v_1, v_2 og v_3. Da Ordensfølgen for de forskjellige Delinger af Rækken er vilkaarlig, ville vi saavel her som senere stedse forudsætte, at man først begynder med at afsondre de m_1 mindste Iagttagelser, og at man dernæst, ved successive at tilføie de næstpaafølgende $m_2 - m_1$, $m_3 - m_2$, $m_4 - m_3$ o. s. v., gaaer over til m_2, m_3, m_4 o. s. v. Man faaer da stedse $u_1 = v_1$, og i nærværende Tilfælde tillige $\frac{1}{4} + v_1$ for den totale Chance af de mindste Feil, der alle ere mindre end den til h_1 svarende. Ved Overgangen til den næste Deling tilføies $m_2 - m_1 = \frac{1}{4}n$ af de paafølgende mindste Iagttagelser, eller, med andre Ord, man tilføier $\frac{m_2 - m_1}{n - m_1} = \frac{1}{3}$ af hele Resten. Forholdet er da ganske sammenfaldende med det, hvor der foreligger en heel ny Række af $n - m_1$ Iagttagelser, hvis tilsvarende Feil udelukkende henhøre til den sidste Deel af Feilrækken og tilsammen have Chancen: $\frac{3}{4} - v_1$. Naar der nu af de $n - m_1$ Iagttagelser tages alle de mindste indtil Tredieparten, saa er det sandsynligt, at denne Trediepart ogsaa omfatter de næstpaafølgende Feil, hvis Chancer tilsammen udgjøre Tredieparten af $\frac{3}{4} - v_1$, men da der nødvendigviis ved denne Deling af den totale Chance maa indtræde en ny Afvigelse v_2 fra den approximative Værdi $\frac{1}{3}$, saa bliver det nøiagtige Udtryk for de tilføiede Chancer ikke $(\frac{3}{4} - v_1) . \frac{1}{3}$, men $(\frac{3}{4} - v_1)(\frac{1}{3} + v_2)$, eller, idet Leddet af høiere Orden bortkastes: $\frac{1}{4} - \frac{1}{3}v_1 + \frac{3}{4}v_2$, og den totale

Chance for alle de Feil, der ere mindre end den til h_2 svarende vil saaledes være:

$$(\tfrac{1}{4}+v_1)+(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{3}v_1+\tfrac{3}{4}v_2)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}v_1+\tfrac{3}{4}v_2$$

Gaaes der nu videre ved paany af de resterende $n-m_2$ Iagttagelser at tilføie de paafølgende m_3-m_2, eller Halvparten af hele Resten, idet $\frac{m_3-m_2}{n-m_2}=\frac{1}{2}$, saa er den totale Chance, der herved deles:

$$1-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}v_1+\tfrac{3}{4}v_2)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}v_1-\tfrac{3}{4}v_2$$

og de tilføiede Chancer blive da:

$$(\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}v_1-\tfrac{3}{4}v_2)(\tfrac{1}{2}+v_3)=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{3}v_1-\tfrac{3}{8}v_2+\tfrac{1}{2}v_3$$

som adderet til det ovenfor fundne Udtryk giver den totale Chance for alle Feil, der ere mindre end den til h_3 svarende, nemlig:

$$(\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}v_1+\tfrac{3}{4}v_2)+(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{3}v_1-\tfrac{3}{8}v_2+\tfrac{1}{2}v_3)=\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{3}v_1+\tfrac{3}{8}v_2+\tfrac{1}{2}v_3$$

Af denne Udvikling følger:

$$u_1=v_1$$
$$u_2=\tfrac{2}{3}v_1+\tfrac{3}{4}v_2$$
$$u_3=\tfrac{1}{3}v_1+\tfrac{3}{8}v_2+\tfrac{1}{2}v_3$$

som indsat i (9) giver Ligningerne:

$$\begin{aligned} v_1 &= a\Delta - ax + ay \\ \tfrac{2}{3}v_1+\tfrac{3}{4}v_2 &= \quad\quad -bx \\ \tfrac{1}{3}v_1+\tfrac{3}{8}v_2+\tfrac{1}{2}v_3 &= a\Delta - ax - ay \end{aligned}$$

hvilke nu med Lethed føres tilbage paa den Form, der forudsættes ved Anvendelsen af de mindste Quadraters Methode. Ved Eliminationen af v_1 mellem den første og den anden Ligning, og af v_1 og v_2 mellem den anden og den tredie, erholdes nemlig:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a\Delta - ax + ay \\ \tfrac{3}{4}v_2 &= -\tfrac{2}{3}a\Delta-(b-\tfrac{2}{3}a)x-\tfrac{2}{3}ay \\ \tfrac{1}{2}v_3 &= a\Delta-(a-\tfrac{1}{2}b)x-ay \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

hvor det kun endnu staaer tilbage at bestemme Vægtene. Men af (6) findes de sandsynlige Feil for v_1, v_2 og v_3 ved successive at sætte for $\frac{m}{n}$ Værdierne $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{2}$, samt for n de tilsvarende n, $\frac{3}{4}n$ og $\frac{1}{2}n$, hvorved de omhandlede Feil blive:

$$\text{for } v_1 \ldots\ldots \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{3}{8}}$$

$$- \; v_2 \ldots\ldots \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{16}{27}}$$

$$- \; v_3 \ldots\ldots \frac{\varrho}{\sqrt{n}}$$

Naar Vægteenheden antages at skulle svare til den sidst anførte Feil, saa blive Ligningernes Vægte respective $\frac{8}{3}$, 3 og 4. Af (10) udledes da paa sædvanlig Maade Normalligningerne:

$$0 = 4\,a\varDelta\,(b - 2\,a) + 4\,(b^2 - 2\,ab + 2\,a^2)\,x$$

$$0 = 8\,a^2 y$$

der give:

$$x = \frac{a\varDelta(2\,a - b)}{b^2 - 2ab + 2a^2}; \quad y = 0 \; \ldots\ldots\ldots \; (11)$$

med de tilsvarende sandsynlige Feil:

$$\frac{\varrho}{2\sqrt{n\,(b^2 - 2ab + 2\,a^2)}}; \quad \frac{\varrho}{2\,a\sqrt{2\,n}} \; \ldots\ldots\ldots \; (12)$$

Coefficienterne a og b kunne først bestemmes naar Feilloven er given. Antages til Ex. at denne er den sædvanlige exponentielle, saa haves:

$$a = \frac{\varrho}{r\sqrt{\pi}}\,e^{-\varrho^2}; \quad b = \frac{\varrho}{r\sqrt{\pi}}$$

Man faaer da:

$$x = \frac{2 - e^{\varrho^2}}{2 - 2\,e^{\varrho^2} + e^{2\varrho^2}}\cdot\varDelta; \quad y = 0$$

med de sandsynlige Feil:

$$\frac{r}{\sqrt{n}}\cdot\frac{e^{\varrho^2}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2 - 2\,e^{\varrho^2} + e^{2\varrho^2}}}; \quad \frac{r}{\sqrt{n}}\cdot\frac{e^{\varrho^2}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

idet man tillige har:

$$\frac{2 - e^{\varrho^2}}{2 - 2\,e^{\varrho^2} + e^{2\varrho^2}} = 0{,}6983; \quad \frac{e^{\varrho^2}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2 - 2\,e^{\varrho^2} + e^{2\varrho^2}}} = 1{,}0775;$$

$$\frac{e^{\varrho^2}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0{,}7867$$

I nærværende Tilfælde, hvor den almindelige Feillov antages gjældende, vilde man, som bekjendt, erholde de absolut skarpeste

Bestemmelser af H og r ved for H at tage det arithmetiske Middeltal af samtlige Iagttagelser, og ved indirecte at udlede Værdien for r af Iagttagelsernes Middelfeil, der selv bestemmes ved Udtrykket $\sqrt{\frac{[ff]}{n-1}}$. De sandsynlige Feil for H og r bleve da:

$$\frac{r}{\sqrt{n}}; \quad \frac{\varrho r}{\sqrt{n-1}}$$

hvor den første sees kun at være lidet mindre end den ovenfor fundne.

Det vil maaskee ikke være ganske overflødigt til den i nærværende Paragraph givne Udvikling at føie den Bemærkning, at de sandsynlige Feil for u_2, u_3, u_4 o. s. v. nødvendigviis maae blive uforandret de samme, hvad enten man bestemmer dem directe ved for m i Formel (6) at sætte de tilsvarende Værdier m_2, m_3, m_4 o. s. v., eller indirecte ved Hjælp af deres Udtryk i v_1, v_2, v_3, v_4 o. s. v. og de for disse Størrelser fundne sandsynlige Feil. For u_3 erholder man her til Ex. directe den sandsynlige Feil ved $m_3 = \frac{3}{4}n$, som giver Værdien: $\frac{\varrho}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{3}{8}}$, men man har ogsaa, idet $u_3 = \frac{1}{3}v_1 + \frac{3}{8}v_2 + \frac{1}{2}v_3$:

$$\frac{\varrho^2}{n} \cdot \frac{3}{8} = \frac{\varrho^2}{n}\left\{\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{9}{64} \cdot \frac{16}{27} + \frac{1}{4} \cdot 1\right\}$$

§ 6.

Ved nu at gaae over til Behandlingen af den almindelige Opgave, hvor Rækken er deelt i et hvilketsomhelst Antal vilkaarlige Dele, bestemte ved Værdierne m_1, m_2, m_3, $m_4 \ldots$, ville vi først foretage Udviklingen af de forskjellige tilsvarende Chancer og derved benytte Betegnelserne:

$$\frac{m_1}{n} = 1 - q_1; \quad \frac{m_2 - m_1}{n - m_1} = 1 - q_2; \quad \frac{m_3 - m_2}{n - m_2} = 1 - q_3;$$

$$\frac{m_4 - m_3}{n - m_3} = 1 - q_4 \ldots\ldots$$

der medføre:

$$q_1 = \frac{n - m_1}{n}; \quad q_2 = \frac{n - m_2}{n - m_1}; \quad q_3 = \frac{n - m_3}{n - m_2}; \quad q_4 = \frac{n - m_4}{n - m_3} \ldots\ldots$$

og tillige:

$$q_1 = \frac{n-m_1}{n}; \quad q_1 q_2 = \frac{n-m_2}{n}; \quad q_1 q_2 q_3 = \frac{n-m_3}{n};$$

$$q_1 q_2 q_3 q_4 = \frac{n-m_4}{n} \ldots\ldots$$

hvilke Betegnelser i høi Grad bidrage til at lette Undersøgelsen.

Den første totale Chance for de Feil, der svare til de m_1 mindste Iagttagelser, bliver aabenbart:

$$1 - q_1 + v_1$$

De Chancer, der tilføies ved at gaae til m_2 blive da:

$$(q_1 - v_1)(1 - q_2 + v_2) = (-q_1 + v_1)(q_2 - 1) + q_1 v_2$$

og den til m_2 svarende totale Chance følgelig:

$$1 + (-q_1 + v_1) q_2 + q_1 v_2 = 1 - q_1 q_2 + q_2 v_1 + q_1 v_2$$

Paa lignende Maade maa man ved at gaae til m_3 tilføie Chancerne:

$$(q_1 q_2 - q_2 v_1 - q_1 v_2)(1 - q_3 + v_3)$$
$$= (-q_1 q_2 + q_2 v_1 + q_1 v_2)(q_3 - 1) + q_1 q_2 v_3$$

hvorved den til m_3 svarende totale Chance bliver:

$$1 + (-q_1 q_2 + q_2 v_1 + q_1 v_2) q_3 + q_1 q_2 v_3$$
$$= 1 - q_1 q_2 q_3 + q_2 q_3 v_1 + q_1 q_3 v_2 + q_1 q_2 v_3$$

Loven for Dannelsen af disse Udtryk vil allerede være iøinefaldende, og man kan derfor uden mindste Vanskelighed fortsætte de nedenstaaende Ligninger saa langt, som det i hvert forekommende Tilfælde maatte ønskes.

$$\frac{m_1}{n} + u_1 = 1 - q_1 + v_1$$

$$\frac{m_2}{n} + u_2 = 1 - q_1 q_2 + q_2 v_1 + q_1 v_2$$

$$\frac{m_3}{n} + u_3 = 1 - q_1 q_2 q_3 + q_2 q_3 v_1 + q_1 q_3 v_2 + q_1 q_2 v_3$$

$$\frac{m_4}{n} + u_4 = 1 - q_1 q_2 q_3 q_4 + q_2 q_3 q_4 v_1 + q_1 q_3 q_4 v_2 + q_1 q_2 q_4 v_3 + q_1 q_2 q_3 v_4$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Ved at indsætte de herved bestemte Værdier for u_1, u_2, u_3, u_4 ... i Ligningerne (8) erholdes:

$$v_1 = k_1 + a_1 x + b_1 y$$
$$q_2 v_1 + q_1 v_2 = k_2 + a_2 x + b_2 y$$
$$q_2 q_3 v_1 + q_1 q_3 v_2 + q_1 q_2 v_3 = k_3 + a_3 x + b_3 y$$
$$q_2 q_3 q_4 v_1 + q_1 q_3 q_4 v_2 + q_1 q_2 q_4 v_3 + q_1 q_2 q_3 v_4 = k_4 + a_4 x + b_4 y$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Og subtraheres nu den første Ligning multipliceret med q_2 fra den anden, den anden multipliceret med q_3 fra den tredie, den tredie multipliceret med q_4 fra den fjerde o. s. v., saa vil man ogsaa have udført Eliminationen af alle i Ligningerne indtrædende Ubekjendte v_1, v_2, v_3, v_4 ...., med Undtagelse af den sidst i hver Ligning forekommende. Indføres almindeligt Betegnelserne:

$$K_1 = k_1;\ K_2 = k_2 - q_2 k_1;\ K_3 = k_3 - q_3 k_2;\ K_4 = k_4 - q_4 k_3 \ldots\ldots$$
$$A_1 = a_1;\ A_2 = a_2 - q_2 a_1;\ A_3 = a_3 - q_3 a_2;\ A_4 = a_4 - q_4 a_3 \ldots\ldots$$
$$B_1 = b_1;\ B_2 = b_2 - q_2 b_1;\ B_3 = b_3 - q_3 b_2;\ B_4 = b_4 - q_4 b_3 \ldots\ldots$$

vil man saaledes til den endelige Bestemmelse af x og y erholde Systemet:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= K_1 + A_1 x + B_1 y \\ q_1 v_2 &= K_2 + A_2 x + B_2 y \\ q_1 q_2 v_3 &= K_3 + A_3 x + B_3 y \\ q_1 q_2 q_3 v_4 &= K_4 + A_4 x + B_4 y \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (13)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

hvor det kun endnu kommer an paa at bestemme Ligningernes Vægte: P_1, P_2, P_3, P_4 ... Men ved Anvendelsen af (6) til Bestemmelsen af de sandsynlige Feil for v_1, v_2, v_3, v_4 ... bliver for $\frac{m}{n}$ successive at indføre Værdierne:

$$1 - q_1;\quad 1 - q_2;\quad 1 - q_3;\quad 1 - q_4 \ldots\ldots$$

og for n de tilsvarende:

$$n;\quad q_1 n;\quad q_1 q_2 n;\quad q_1 q_2 q_3 n \ldots\ldots$$

Saaledes erholder man da for Feilene det fælleds Udtryk: $\varrho\sqrt{\frac{2}{n}Q}$, hvor Q successive modtager Værdierne:

$$q_1(1-q_1);\quad \frac{q_2(1-q_2)}{q_1};\quad \frac{q_3(1-q_3)}{q_1 q_2};\quad \frac{q_4(1-q_4)}{q_1 q_2 q_3}$$

og fastsættes Vægteenheden at skulle svare til Feilen $\varrho\sqrt{\frac{2q_1}{n}}$, blive Vægtene følgelig:

$$\left.\begin{aligned} &P_1=\frac{1}{1-q_1};\quad P_2=\frac{1}{q_2(1-q_2)};\quad P_3=\frac{1}{q_2 q_3(1-q_3)};\\ &\qquad P_4=\frac{1}{q_2 q_3 q_4(1-q_4)}\ \ldots\ldots \end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (14)$$

Man kan nu af (13) udlede Normalligningerne:

$$0=[PAK]+[PAA]x+[PAB]y$$
$$0=[PBK]+[PAB]x+[PBB]y$$

hvis Opløsning giver:

$$x=\frac{[PBK][PAB]-[PAK][PBB]}{[PAA][PBB]-[PAB]^2};\ y=\frac{[PAK][PAB]-[PBK][PAA]}{[PAA][PBB]-[PAB]^2}\ (15)$$

med de tilsvarende sandsynlige Feil R og R_1 for H og r:

$$R=\frac{\varrho}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q_1[PBB]}{[PAA][PBB]-[PAB]^2}};\ R_1=\frac{\varrho}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q_1[PAA]}{[PAA][PBB]-[PAB]^2}}\ (16)$$

Problemet er saaledes fuldstændigt løst ved Ligningerne (7), (8) og (13) i Forbindelse med Formlerne (14), (15) og (16).

§ 7.

Der gives et meget almindeligt Tilfælde, i hvilket de ovenfor udviklede Formler reduceres paa en mærkelig Maade og frembringe en høist elegant Løsning. Dette Tilfælde indtræder naar den foreliggende Række deles i et vilkaarligt Antal $s+1$ ligestore Dele ved nedenstaaende s Værdier af m.

$$m_1=\frac{1}{s+1}n;\quad m_2=\frac{2}{s+1}n;\quad m_3=\frac{3}{s+1}n\ \ldots\ldots\ m_s=\frac{s}{s+1}n.$$

Man faaer da:

$$1-q_1=\frac{1}{s+1};\quad q_1=\frac{s}{s+1};\quad P_1=s\,.\,\frac{s+1}{s}$$

$$1-q_2=\frac{1}{s};\quad q_2=\frac{s-1}{s};\quad P_2=s\,.\,\frac{s}{s-1}$$

$$1-q_3=\frac{1}{s-1};\quad q_3=\frac{s-2}{s-1};\quad P_3=s\,.\,\frac{s-1}{s-2}$$

$$1-q_4=\frac{1}{s-2};\quad q_4=\frac{s-3}{s-2};\quad P_4=s\,.\,\frac{s-2}{s-3}$$

$$\begin{matrix}\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{matrix}$$

$$1-q_s=\frac{1}{2};\quad q_s=\frac{1}{2};\quad P_s=s\,.\,\frac{2}{1}$$

Den almindelige Udvikling af $[PAK]$ giver:

$$P_1A_1K_1=P_1q_1\,.\,\frac{a_1k_1}{q_1}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.=s\,.\,\frac{s+1}{s}\,a_1k_1$$

$$P_2A_2K_2=P_2q_2\left(\frac{a_2k_2}{q_2}-a_2k_1-a_1k_2+q_2a_1k_1\right)=s\left(\frac{s}{s-1}a_2k_2-a_2k_1-a_1k_2+\frac{s-1}{s}a_1k_1\right)$$

$$P_3A_3K_3=P_3q_3\left(\frac{a_3k_3}{q_3}-a_3k_2-a_2k_3+q_3a_2k_2\right)=s\left(\frac{s-1}{s-2}a_3k_3-a_3k_2-a_2k_3+\frac{s-2}{s-1}a_2k_2\right)$$

$$P_4A_4K_4=P_4q_4\left(\frac{a_4k_4}{q_4}-a_4k_3-a_3k_4+q_4a_3k_3\right)=s\left(\frac{s-2}{s-3}a_4k_4-a_4k_3-a_3k_4+\frac{s-3}{s-2}a_3k_3\right)$$

$$\begin{matrix}\cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{matrix}$$

$$P_sA_sK_s=P_sq_s\left(\frac{a_sk_s}{q_s}-a_sk_{s-1}-a_{s-1}k_s+q_sa_{s-1}k_{s-1}\right)=s\,.\left(\frac{2}{1}a_sk_s-a_sk_{s-1}-a_{s-1}k_s+\frac{1}{2}a_{s-1}k_{s-1}\right)$$

og ved Summationen af samtlige Addender erholdes saaledes:

$$[PAK]=2s\,[ak]-s\,[a_{i+1}k_i+a_i\,k_{i+1}]$$

hvor den første Sum bestaaer af s Led, den sidste derimod af $s-1$ Binomer, svarende til Værdierne $i=1$, $i=2$, $i=3\,\ldots.$ $i=s-1$. Ombyttes a med b i Udtrykket for $[PAK]$ faaes paa lignende Maade:

$$[PBK]=2s[bk]-s[b_{i+1}k_i+b_ik_{i+1}]$$

og en Ombytning af k med b vil ligeledes give:

$$[PAB]=2s[ab]-s[a_{i+1}b_i+a_ib_{i+1}]$$

Ved i dette sidste Udtryk at sætte enten a for b, eller b for a erholdes endelig:

$$[PAA] = 2s[aa] - 2s[a_i a_{i+1}]$$
$$[PBB] = 2s[bb] - 2s[b_i b_{i+1}]$$

idet Binomerne i de sidste Summer nu ere reducerede til $s-1$ Monomer.

Bemærkes det endvidere, at man ved Dannelsen af Ligningerne (7) og (8) har:

$$\psi\left(\frac{s+1-i}{s+1}\right) = \psi\left(1 - \frac{i}{s+1}\right) = -\psi\left(\frac{i}{s+1}\right)$$

altsaa: $f_s = -f_1$; $f_{s-1} = -f_2 \ldots\ldots$

eller almindeligt: $f_{s+1-i} = -f_i$

og erindres det tillige, at man stedse har $\varphi(-f) = \varphi(f)$, saa sees det, at man ogsaa i Systemet (8) vil faae:

$$a_{s+1-i} = a_i \quad \text{og} \quad b_{s+1-i} = -b_i$$

Men uagtet det er indlysende, at denne eiendommelige Beskaffenhed af Coefficienterne i de forskjellige Ligninger endnu yderligere maa reducere alle de ovenfor udviklede, i og for sig meget simple Udtryk, saa skulle vi dog her indskrænke os til den nærmere Betragtning af $[PAB]$, da det fremfor Alt er ved denne Størrelse, at Reductionen fører til et mærkeligt Resultat:

I Summen $[ab]$ vil man nemlig have $a_s b_s = -a_1 b_1$; $a_{s-1} b_{s-1} = -a_2 b_2$ og almindeligt $a_{s+1-i} b_{s+1-i} = -a_i b_i$. Er s derfor lige, vil hele Summen aabenbart reduceres til Nul, idet to og to af de ligelangt fra Rækkens Yderender staaende Led ere numerisk ligestore og have modsatte Tegn. Men det samme vil ogsaa finde Sted naar s er ulige, thi vel er der da et midterste Led, der ikke har noget tilsvarende, men til Gjengjæld indtræder ogsaa i dette Led en Værdie af b, der selv er Nul, idet den svarer til Rækkens Midte, hvor man har $f = 0$. I Summen: $[a_{i+1} b_i + a_i b_{i+1}]$ har man paa lignende Maade:

$$(a_2 b_1 + a_1 b_2) = -(a_s b_{s-1} + a_{s-1} b_s);$$
$$(a_3 b_2 + a_2 b_3) = -(a_{s-1} b_{s-2} + a_{s-2} b_{s-1}) \ldots\ldots$$

og almindeligt:

$$(a_{i+1}b_i + a_i b_{i+1}) = -(a_{s+1-i}b_{s-i} + a_{s-i}b_{s+1-i})$$

Er $s-1$ lige vil saaledes ogsaa her den hele Sum forsvinde, idet to og to af Binomerne ophæve hinanden, og er $s-1$ ulige vil det midterste Led, der ikke har noget tilsvarende, atter selv være reduceret til Nul. Man faaer derfor under alle Omstændigheder $[PAB]=0$, som indsat i (15) og (16) giver den søgte Løsning:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{[PAK]}{[PAA]} = \frac{\frac{1}{2}[a_{i+1}k_i + a_i k_{i+1}] - [ak]}{[aa] - [a_i a_{i+1}]} \\ y &= -\frac{[PBK]}{[PBB]} = \frac{\frac{1}{2}[b_{i+1}k_i + b_i k_{i+1}] - [bk]}{[bb] - [b_i b_{i+1}]} \end{aligned}\right\} \ldots (17)$$

med de tilsvarende sandsynlige Feil:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2s}{(s+1)[PAA]}} = \frac{\varrho}{\sqrt{n(s+1)\{[aa]-[a_i a_{i+1}]\}}} \\ R_1 &= \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2s}{(s+1)[PBB]}} = \frac{\varrho}{\sqrt{n(s+1)\{[bb]-[b_i b_{i+1}]\}}} \end{aligned}\right\} \ldots (18)$$

Da det tidligere i § 5 behandlede Problem er et meget specielt Tilfælde af det her løste, saa ville ogsaa (11) og (12) være indbefattede i (17) og (18) og fremstaae af disse, naar man indfører de tilsvarende specielle Værdier, nemlig:

$$s=3\,;\; a_1=a_3=-a\,;\; a_2=-b\,;\; b_1=a\,;\; b_2=0\,;\; b_3=-a\,;$$
$$k_1=k_3=a\varDelta\,;\; k_2=0\,.$$

der give:

$$[ak]=-2a^2\varDelta\,;\; [a_{i+1}k_i+a_i k_{i+1}]=-2ab\varDelta\,;\; [bk]=0\,;$$
$$[b_{i+1}k_i+b_i k_{i+1}]=0\,;\; [aa]=2a^2+b^2\,;\; [a_i a_{i+1}]=2ab\,;$$
$$[bb]=2a^2\,;\; [b_i b_{i+1}]=0\,.$$

§ 8.

For bestandigt voxende Værdier af s ville i (18) saavel R som R_1 bestandigt blive mindre og mindre, idet de uafbrudt convergere mod visse bestemte Grændser, som de først naae ved $s=\infty$. Da det i flere Henseender kan være af Interesse at lære disse Grændseværdier nærmere at kjende, skulle vi nu vise, hvorledes det er muligt at finde dem.

I Udtrykket for R vil det være let at bringe den i Nævneren forekommende Function af Coefficienterne paa følgende Form:

$$[aa]-[a_i a_{i+1}]=\tfrac{1}{2}\left\{a_1^2+(a_2-a_1)^2+(a_3-a_2)^2+\ldots(a_s-a_{s-1})^2+a_s^2\right\}$$

Men man har tillige

$$a_1=-\varphi(f_1)\,;\quad a_2=-\varphi(f_2)\ \text{ og almindeligt: }\ a_i=-\varphi(f_i)$$

For meget store Værdier af s vil man derfor ganske almindeligt have:

$$(a_{i+1}-a_i)=-\varphi(f_{i+1})+\varphi(f_i)=-\varphi'(f_i)(f_{i+1}-f_i)$$

Følgelig:

$$[aa]-[a_i a_{i+1}]=$$

$$\tfrac{1}{2}\left\{\varphi(f_1)^2+\varphi'(f_1)^2(f_2-f_1)^2+\varphi'(f_2)^2(f_3-f_2)^2+\ldots\varphi'(f_{s-1})^2(f_s-f_{s-1})^2+\varphi(f_s)^2\right\}$$

Da Rækken forudsættes deelt i $s+1$ ligestore Dele ved de til $f_1, f_2, f_3 \ldots f_s$ svarende Snit, maa man endvidere have:

$$\int_{f_i}^{f_{i+1}}\varphi(f)\,df=\varphi(f_i)(f_{i+1}-f_i)=\frac{1}{s+1}$$

som indført i ovenstaaende Udtryk giver:

$$[aa]-[a_i a_{i+1}]=$$

$$\varphi(f_1)^2+\frac{1}{2(s+1)}\left\{\frac{\varphi'(f_1)^2}{\varphi(f_1)}(f_2-f_1)+\frac{\varphi'(f_2)^2}{\varphi(f_2)}(f_3-f_2)+\ldots\frac{\varphi'(f_{s-1})^2}{\varphi(f_{s-1})}(f_s-f_{s-1})\right\}$$

eller for $s=\infty$

$$[aa]-[a_i a_{i+1}]=\varphi(f_1)^2+\frac{1}{2(s+1)}\int_{f_1}^{f_s}\frac{\varphi'(f)^2}{\varphi(f)}df=\varphi(f_1)^2+\frac{1}{s+1}\int_{0}^{f_s}\frac{\varphi'(f)^2}{\varphi(f)}df\ldots(19)$$

Ved paa lignende Maade at bestemme $[bb]-[b_i b_{i+1}]$ vilde man ganske almindeligt have: $b=-\frac{f}{r}\varphi(f)$, og satte man nu $\frac{f}{r}\varphi(f)=F(f)$, saa vilde den ovenfor givne Udvikling kunne følges Skridt for Skridt, og man erholdt da:

$$[bb]-[b_i b_{i+1}]=F(f_1)^2+\frac{1}{s+1}\int_{0}^{f_s}\frac{F'(f)^2}{\varphi(f)}\,df\ldots\ldots(20)$$

For hvilkesomhelst Feillove vil man uden Vanskelighed kunne bestemme de i (19) og (20) indtrædende Integraler og derved tillige de søgte Grændseværdier. Naar den almindelige Feillov er gjældende har man saaledes:

$$\varphi(f) = \frac{\varrho}{r\sqrt{\pi}} e^{-\varrho^2 \frac{f^2}{r^2}}\;;\quad \varphi'(f) = -\frac{2\varrho^3 . f}{r^3\sqrt{\pi}} e^{-\varrho^2\frac{f^2}{r^2}}$$

$$F(f) = \frac{\varrho f}{r^2\sqrt{\pi}} e^{-\varrho^2\frac{f^2}{r^2}}\;;\quad F'(f) = \frac{\varrho}{r^2\sqrt{\pi}} e^{-\varrho^2\frac{f^2}{r^2}} \left\{1 - 2\varrho^2 \frac{f^2}{r^2}\right\}$$

altsaa, idet $f_s = \infty$ og saavel $\varphi(f_1)$ som $F(f_1) = 0$:

$$[aa] - [a_i a_{i+1}] = \frac{4\varrho^2}{(s+1) r^2 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt$$

$$[bb] - [b_i b_{i+1}] = \frac{1}{(s+1) r^2 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty (1 - 4t^2 + 4t^4)\, e^{-t^2} dt$$

Men ved Hjælp af den bekjendte Reductionsformel:

$$\int_0^\infty t^{p+1} e^{-t^2} dt = \frac{p}{2} \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t^2} dt$$

bliver her:

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\int_0^\infty t^4 e^{-t^2} dt = \frac{3}{2} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$$

følgelig:

$$[aa] - [a_i a_{i+1}] = \frac{\varrho^2}{(s+1) r^2}\;;\quad [bb] - [b_i b_{i+1}] = \frac{1}{(s+1) r^2}$$

som indsat i (18) giver:

$$R = \frac{r}{\sqrt{n}}\;;\quad R_1 = \frac{\varrho r}{\sqrt{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Afseet fra en mindre Afvigelse i Udtrykket for R_1, som vi ikke her nærmere skulle søge at forklare, ere disse Værdier ganske overeensstemmende med de tidligere, der i § 5 angaves at svare til de absolut skarpeste Bestemmelser. Den Maade, paa hvilken Nærmelsen til Grændserne finder Sted, fortjener imidlertid særligt at fremhæves, fordi den har en afgjørende Betydning med Hensyn til Methodens practiske Brugbarhed. Dersom man nemlig ved smaa Værdier af s erholdt Resultater, hvis Skarphed fjernede sig langt fra Grændserne, og den stærkere Tilnærmelse først blev kjendelig, naar s selv blev et stort Tal, saa vilde nogenlunde skarpe Bestemmelser af H og r ogsaa først kunne naaes ved et større Antal Delinger af Iagttagelsesrækken, og Methoden tabte da et af dens væsentligste Fortrin, den store Lethed i Udledelsen af de søgte Værdier. Men nu er Forholdet aldeles forskjelligt. Allerede ved $s = 1$ erholdes for R en Værdie, der ligger temmeligt nær ved den absolut mindste, og det er tidligere viist i § 5, at en Anvendelse af 3 Snit gav en saa stærk Tilnærmelse, at Grændsen næsten var naaet. Selv ved et ganske ringe Antal Snit, maaskee aldrig flere end 3, vil man derfor erholde en saa tilfredsstillende Bestemmelse af H, at den større Skarphed, som en vidtløftig og møisommelig Fortsættelse af Delingen kunde give, neppe i practisk Henseende fortjener at tillægges nogen virkelig Betydning. Ved Bestemmelsen af r vil Forholdet vel stille sig noget mindre gunstigt, idet Tilnærmelsen ved R_1 gaaer noget langsommere, men til Gjengjæld maa det da ogsaa bemærkes, at man sjelden ved denne Størrelse lægger Vægt paa den største Skarphed. For Praxis vil den overveiende Interesse derfor stedse være knyttet til Udviklingen af de Formler, der svare til de mindste Værdier af s, naar s her ganske almindeligt betegner Antallet af Snit, selv hvor de enkelte Dele ere af forskjellig Størrelse. Da der alt i det Foregaaende er givet en udførlig Fremstilling af Tilfældet $s = 1$, saa skulle vi endnu kun noget nærmere gjennemgaae de til $s = 2$ og $s = 3$ svarende Delinger af Rækken.

§ 9.

Ved Anvendelsen af 3 Snit vil den simpleste og naturligste Deling være den, hvor det midterste Snit føres gjennem selve Rækkens Midte, medens det første og det tredie lægges symmetrisk, hvert paa sin Side af Midten. Man vil da stedse have $f_2 = 0$ og $f_1 = -f_3$, idet tillige q_1, q_2 og q_3 indbyrdes ere forbundne ved Ligningerne:

$$1 - q_1 q_2 = \tfrac{1}{2}\,; \quad 1 - q_1 q_2 q_3 = q_1$$

der give hvilkesomhelst to af disse Størrelser ved Hjælp af den tredie alene. I det Følgende ville vi imidlertid foretrække, at udtrykke dem alle tre ved en fjerde q, der bestemmes ved:

$$q = \int_{f_1}^{f_3} \varphi(f)\, df = 2\int_{0}^{f_3} \varphi(f)\, df\,.$$

Herved bliver:

$$q_1 = \frac{1+q}{2}\,;\quad q_2 = \frac{1}{1+q}\,;\quad q_3 = 1-q$$

som indført i (14) giver:

$$P_1 q_1 = \frac{1+q}{1-q}\,;\quad P_2 q_2 = \frac{1+q}{q}\,;\quad P_3 q_3 = \frac{1+q}{q}$$

Den i § 7 foretagne almindelige Udvikling af $[PAK]$ vil saaledes i nærværende Tilfælde reduceres til:

$$[PAK] = \frac{1+q}{q}\left\{\frac{a_1 k_1 + a_3 k_3}{1-q} + 2a_2 k_2 - (a_2 k_1 + a_1 k_2 + a_3 k_2 + a_2 k_3)\right\}$$

hvoraf atter ved en simpel Ombytten af Bogstaver erholdes:

$$[PBK] = \frac{1+q}{q}\left\{\frac{b_1 k_1 + b_3 k_3}{1-q} + 2b_2 k_2 - (b_2 k_1 + b_1 k_2 + b_3 k_2 + b_2 k_3)\right\}$$

$$[PAB] = \frac{1+q}{q}\left\{\frac{a_1 b_1 + a_3 b_3}{1-q} + 2\,a_2 b_2 - (a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_3 b_2 + a_2 b_3)\right\}$$

$$[PAA] = \frac{1+q}{q}\left\{\frac{a_1 a_1 + a_3 a_3}{1-q} + 2a_2 a_2 - 2(a_1 a_2 + a_2 a_3)\right\}$$

$$[PBB] = \frac{1+q}{q}\left\{\frac{b_1 b_1 + b_3 b_3}{1-q} + 2b_2 b_2 - 2(b_1 b_2 + b_2 b_3)\right\}$$

For end yderligere at reducere disse Udtryk maa man nærmere betragte Ligningerne (7) og (8). Sættes $f_3 = cr$ blive de førstnævnte her:

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi(cr)\,\{h_1 - H + cr\} \\ u_2 &= \varphi(0)\;\{h_2 - H\} \\ u_3 &= \varphi(cr)\,\{h_3 - H - cr\} \end{aligned}$$

og indføres nu i Overeensstemmelse med § 5 Værdierne:

$$H_0 = h_2\,;\quad r_0 = \frac{h_3 - h_1}{2c}$$

idet man tillige benytter Betegnelserne:

$$\frac{h_3+h_1}{2}-h_2=\Delta\,;\quad \varphi(cr)=a\,;\quad \varphi(0)=b$$

saa fremtræde Ligningerne (8) i følgende Form:

$$\begin{aligned} u_1 &= a\Delta - ax + acy \\ u_2 &= - bx \\ u_3 &= a\Delta - ax - acy \end{aligned}$$

og man har saaledes:

$$k_1=k_3=a\Delta\,;\ k_2=0\,;\ a_1=a_3=-a\,;\ a_2=-b\,;$$
$$b_1=+ac\,;\ b_2=0\,;\ b_3=-ac$$

som indsat i de ovenfor udviklede Udtryk give:

$$\begin{aligned} [PAK] &= \frac{1+q}{q}\,.\,2a\Delta\left\{b-\frac{a}{1-q}\right\} \\ [PBK] &= 0 \\ [PAB] &= 0 \\ [PAA] &= \frac{2(1+q)}{q}\left\{\frac{a^2}{1-q}+b^2-2ab\right\} \\ [PBB] &= \frac{2(1+q)}{q}\,.\,\frac{a^2c^2}{1-q} \end{aligned}$$

Herved erholdes da ifølge (15) og (16) nedenstaaende Løsning af den behandlede Opgave:

$$x=\frac{a\Delta\,(a-(1-q)\,b)}{a^2+(1-q)\,(b^2-2ab)}\quad;\quad y=0$$

$$R=\frac{\varrho}{\sqrt{2n}}\sqrt{\frac{q\,(1-q)}{a^2+(1-q)(b^2-2ab)}}\,;\quad R_1=\frac{\varrho}{\sqrt{2n}}\sqrt{\frac{q\,(1-q)}{a^2c^2}}$$

og da Problemet i § 5 atter fremtræder som et specielt Tilfælde, svarende til Værdierne $q=\frac{1}{2}$ og $c=1$, saa ville ogsaa disse Formler ved de nævnte Værdier reduceres til (11) og (12).

For den almindelige Feillov erholder man, naar $\varrho\dfrac{f_3}{r}$ betegnes med t,

$$a=\frac{\varrho}{r\sqrt{\pi}}e^{-t^2}\,;\quad b=\frac{\varrho}{r\sqrt{\pi}}\,;\quad c=\frac{t}{\varrho}\,;\quad q=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$$

altsaa:

$$x = \frac{e^{-2t^2} - (1-q)\,e^{-t^2}}{e^{-2t^2} + (1-q)\,(1-2e^{-t^2})} \cdot \varDelta\ ; \quad y = 0 \ \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

$$R = \frac{r}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{q\,(1-q)}{e^{-2t^2} + (1-q)(1-2e^{-t^2})}}\ ; \ R_1 = \frac{\varrho r}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{q\,(1-q)}{t^2\, e^{-2t^2}}} \quad (23)$$

Den skarpeste Bestemmelse af H, eller den mindste Værdie af R, vil saaledes svare til Maximalværdien af Størrelsen:

$$Q = \frac{e^{-2t^2}}{q\,(1-q)} + \frac{1-2e^{-t^2}}{q}$$

Men en nærmere Undersøgelse af denne Størrelse viser nu let, at den opnaaer sine mindste Værdier ved $t=0$ og $t=\infty$, som begge give $Q=1$, og at den mellem disse Grændser stadigt voxer henimod dens Maximum, der indtræder meget nær ved $t=0{,}70$, eller ved den saakaldte Middelfeil, hvor man faaer $q=0{,}68$ og $Q=1{,}386$. Naar de to Snit, der ligge symmetrisk mod Midten af Rækken, indtage de tilsvarende Stillinger, eller paa det nærmeste afskjære Sjetteparten af samtlige Iagttagelser fra hver af Rækkens Yderender, saa vil som Følge heraf R reduceres til $\frac{r}{\sqrt{n}} . 1{,}065$, altsaa nærme sig stærkt til den absolut mindste Værdie $\frac{r}{\sqrt{n}}$. Fjerne Snittene sig derimod fra de betegnede Stillinger, idet de enten bevæge sig henimod Midten, eller henimod Yderenderne, saa vil i begge Tilfælde Nøiagtigheden aftage og R uafbrudt voxe. De ugunstigste Stillinger fremstaae endelig, naar Snittene enten falde sammen med det midterste, eller fjerne sig i det Uendelige. Saavel i det ene som i det andet af disse Tilfælde faaer man $R = \frac{r}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, det vil sige netop den Nøiagtighed, der svarer til det midterste Snit alene, idet de tvende andre Snit slet ikke bidrage til Bestemmelsen af den søgte Størrelse.

Indsættes Værdien $t=0{,}70$ i Udtrykket for R_1 erholdes:

$$R_1 = \frac{r}{\sqrt{n}} . 0{,}6514 = \frac{\varrho r}{\sqrt{n}} . 1{,}366$$

hvilket giver en Bestemmelse af r, som er ikke lidet skarpere end den tidligere i § 5. Det er imidlertid muligt at lægge Snittene saaledes, at denne Skarphed endnu yderligere forøges, idet Minimummet for R_1 indtræder ved en betydeligt større Værdie af t end den, der giver Minimummet for R. Det førstnævnte svarer nemlig til $t = 1{,}05$ (nøiagtigere mellem 1,04 og 1,05), som giver $q = 0{,}862$ og

$$R_1 = \frac{r}{\sqrt{n}} \,.\, 0{,}5905 = \frac{\varrho r}{\sqrt{n}} \,.\, 1{,}238$$

Naar t fjerner sig fra denne Værdie og bevæger sig enten voxende mod $t = \infty$, eller aftagende mod $t = 0$, saa vil ogsaa R_1 bestandigt tiltage indtil den ved $t = 0$ eller $t = \infty$ opnaaer sine Maximalværdier. Forsaavidt er Forholdet altsaa ganske stemmende med hvad der ovenfor er viist at finde Sted med Hensyn til R, men der indtræder dog her den væsentlige Forskjel, at selve Maximalværdierne for R_1 ere uendelige, hvilket medfører, at r slet ikke lader sig bestemme ved de tilsvarende Stillinger af Snittene.

§ 10.

Indskrænker man sig til $s = 2$, eller til Anvendelsen af 2 Snit alene, saa vil der heller ikke her være nogen Grund til at afvige fra Snittenes symmetriske Stilling mod Midten, som medfører, at man stedse faaer $f_1 = -f_2$ og $1 - q_1 q_2 = q_1$. Sættes $f_2 = cr$ erholdes saaledes til Bestemmelsen af H og r de to fuldstændige Ligninger:

$$v_1 = \varphi(cr)\{h_1 - H + cr\}$$

$$q_2 v_1 + q_1 v_2 = \varphi(cr)\{h_2 - H - cr\}$$

og da Antallet af Ligninger i nærværende Tilfælde netop er ligestort med Antallet af de Ubekjendte, saa falder Udjevningen naturligviis bort, idet Løsningen umiddelbart fremstilles ved:

$$H = \frac{h_1 + h_2}{2}\;;\quad r = \frac{h_2 - h_1}{2c}$$

med de tilsvarende Feil:

$$\frac{1}{2\varphi(cr)}\cdot(q_1 v_2 + (1+q_2)v_1)\,; \qquad \frac{1}{2c\,\varphi(cr)}\cdot(q_1 v_2 - (1-q_2)v_1)$$

Indføres paany den analoge Betegnelse:

$$q = \int_{f_1}^{f_2}\varphi(f)\,df = 2\int_0^{f_2}\varphi(f)\,df\,,$$

der giver:

$$q_1 = \frac{1+q}{2}\,;\quad q_2 = \frac{1-q}{1+q}\,;\quad 1-q_1 = \frac{1-q}{2}\,;$$

$$1-q_2 = \frac{2q}{1+q}\,;\quad 1+q_2 = \frac{2}{1+q}$$

og benyttes de i § 6 fremstillede Udtryk for de sandsynlige Feil paa v_1 og v_2, saa findes ogsaa:

$$R = \frac{\varrho}{\varphi(cr)}\sqrt{\frac{1-q}{2n}}\,;\quad R_1 = \frac{\varrho}{c\varphi(cr)}\sqrt{\frac{q(1-q)}{2n}}\,;$$

som atter for den almindelige Feillov og ved Indførelsen af $\frac{t}{\varrho} = c$ reduceres til:

$$R = \frac{r}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}\cdot(1-q)\,e^{2t^2}}\,;\quad R_1 = \frac{\varrho r}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{q(1-q)}{t^2 e^{-2t^2}}}\quad\ldots\ (24)$$

Som det var at forudsee bliver Udtrykket for R_1 identisk med det tidligere i (23), og man vil saaledes, hvad Bestemmelsen af r angaaer, ganske kunne henvise til den foregaaende Paragraph. For R bliver Forholdet derimod væsentligt forandret. Denne Størrelse opnaaer nu sit Minimum ved en Værdie af t, der ligger meget nær ved 0,43, og naar t fjerner sig fra denne Værdie ved enten at bevæge sig aftagende mod 0, eller tiltagende mod ∞, vil ogsaa R bestandigt voxe mere og mere henimod sine Maxima, der indtræde ved $t = 0$ og $t = \infty$. Den første af disse Maximalværdier er atter den samme som tidligere, nemlig $\frac{r}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, men den anden er nu selv uendelig, og den tilsvarende Stilling af Snittene giver følgelig ingen Bestemmelse af H. Den største Skarphed opnaaes saaledes ved $t = 0{,}43$, der giver $q = 0{,}457$ og $R = \frac{r}{\sqrt{n}}\cdot 1{,}111$. Omendskjøndt Nøiagtigheden nødvendigviis maa blive mindre end den tidligere, der erholdtes ved Anvendelsen af 3 Snit, saa sees det dog, at Forskjellen kun er forholdsviis meget lille. Man vil derfor vistnok ogsaa kunne opstille som almindelig Regel, at det i Praxis saa godt som stedse maa være tilstrækkeligt kun at benytte 2 Snit, hvis Stilling ikke engang strengt behøver at svare til $t = 0{,}43$, eller $q = 0{,}46$, idet en ringe Forandring af disse Størrelser næsten slet ikke udøver nogen Indflydelse paa Værdien af R. Det simpleste og naturligste vil da være at tage $q = \frac{1}{2}$, hvorved Snittene komme til at afskjære Fjerdeparten af samtlige Iagttagelser fra hver af Rækkens Yderender. Man faaer da $c = 1$, og hele Løsningen fremstilles ved Formlerne:

$$\left.\begin{aligned} H = \frac{h_1 + h_2}{2}\,; \quad r = \frac{h_2 - h_1}{2}\,; \quad R = \frac{r}{\sqrt{n}} \,.\, 1{,}113\,; \\ R_1 = \frac{r}{\sqrt{n}} \,.\, 0{,}787 = \frac{\varrho r}{\sqrt{n}} \,.\, 1{,}650 \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

For samlet at give en Udsigt over Resultaterne af de i denne og foregaaende Paragraph anstillede Undersøgelser, hvorved det hele Forhold lader sig overskue med eet Blik, vedføies nedenstaaende lille Tavle, som for Argumentet q $\left(\text{eller } 2q_1 - 1 = 1 - 2\frac{m_1}{n}\right)$ varierende fra $\frac{1}{6}$ til $\frac{1}{6}$ $\left(\text{altsaa } \frac{m_1}{n}\right.$ fra $\left.\frac{1}{12} \text{ til } \frac{1}{12}\right)$ giver Værdierne, saavel af t og c som af de forskjellige i (22), (23) og (24) indtrædende Coefficienter, idet Lösningerne af Opgaven omskrives paa følgende forkortede Maade:

1) $s = 3$.

$$H = h_2 + (\mathrm{I}) \,.\, \Delta\,; \quad r = \frac{h_3 - h_1}{2c}\,; \quad R = (\mathrm{II}) \,.\, \frac{r}{\sqrt{n}}\,; \quad R_1 = (\mathrm{III}) \,.\, \frac{\varrho r}{\sqrt{n}}$$

2) $s = 2$.

$$H = \frac{h_1 + h_2}{2}\,; \quad r = \frac{h_2 - h_1}{2c}\,; \quad R = (\mathrm{IV}) \,.\, \frac{r}{\sqrt{n}}\,; \quad R_1 = (\mathrm{III}) \,.\, \frac{\varrho r}{\sqrt{n}}$$

Ved de i Colonnerne for (II), (III) og (IV) anbragte Streger har man fremhævet Pladserne for de nedenunder vedføiede Minimalværdier af disse Størrelser:

$6q$	t	c	(I)	(II)	(III)	(IV)
0	0,000000	0,0000	1,000	1,253	∞	1,253
1	0,148795	0,3120	0,886	1,168	3,209	1,170
2	0,304560	0,6386	0,791	1,112	2,128	1,123
3	0,476936	1,0000	0,698	1,078	1,650	1,113
4	0,684078	1,4343	0,596	1,065	1,379	1,155
5	0,977919	2,0504	0,449	1,082	1,243	1,331
6	∞	∞	0,000	1,253	∞	∞

$$q = 0{,}68\ ;\quad \text{(II)} = 1{,}065$$
$$q = 0{,}86\ ;\quad \text{(III)} = 1{,}238$$
$$q = 0{,}46\ ;\quad \text{(IV)} = 1{,}111$$

§ 11.

I det Foregaaende er det stiltiende forudsat, at alle enkelte Iagttagelser vare fuldstændigt bekjendte, og at hvilkesomhelst Delinger af Rækken kunde foretages ved fra Yderenden at aftælle de tilsvarende Antal af Iagttagelser. Det er nemlig let at overbevise sig om, at de ogsaa herved fremtrædende Vanskeligheder ikke kunne tillægges nogen virkelig Betydning. Man kan saaledes vel fremhæve, at der til en vilkaarlig Værdie af q i Regelen maa svare en brudden Værdie af m, og at der, selv hvor dette ikke finder Sted, dog stedse ved Valget af h maa indtræde en vis Vilkaarlighed, idet m og h variere discontinuerligt, og Snittet, der skal dele Rækken mellem m og $m+1$, ikke directe kan siges at svare til nogen given Værdie af h. Men det er indlysende, at dette i hvert Fald kun medfører, at man ved Bestemmelsen af h maa anvende en yderst simpel Interpolation, hvorved man til Ex., naar m er heel, tager Mediet af de Iagttagelser, der svare til m og $m+1$. Ved de virkelige Anvendelser vil man imidlertid næsten stedse finde enhver Interpolation overflødig, da Methoden forudsætter n at være et stort Tal, hvilket atter nødvendigviis medfører, at Differentsen mellem to og to paa hinanden følgende Iagttagelser maa synke ned til en umærkelig Størrelse, og det især paa saadanne Steder af Rækken, hvor der fornuftigviis kan være Tale om at dele den. Derimod bliver Forholdet et ganske andet, naar Iagttagelserne ikke enkeltviis ere givne, men kun foreligge gruppeviis ordnede, saaledes at det alene er bekjendt, hvor mange af dem, der indespærres mellem forskjellige givne Værdier af h. I dette Tilfælde, som forøvrigt netop er det, hvor Methodens Fortrin gjøre sig gjældende paa den meest iøinefaldende Maade, vil en vilkaarlig Deling, der bringer Snittet til at gjennemskjære en forelagt Gruppe, være forbundet med store Vanskeligheder. Først ved en vidtløftig og møisommelig Interpolation vil det blive muligt at bestemme den til Snittet svarende Værdie af h, og selv naar en saadan Interpolation er udført bliver Nøiagtigheden for alle udledede Resultater dog stedse usikker, da Feilene, der hidrøre fra Interpolationen, maae bidrage til Forøgelsen af de Feil, der udelukkende skylde Methoden deres Oprindelse. Det ene Rigtige vil upaatvivleligt være, at man i det omhandlede Tilfælde udelukkende holder sig til de umiddelbart givne Delinger af Rækken, idet man blandt disse fortrinsviis udsøger saadanne, der saa nær som muligt falde sammen med de ovenfor betegnede gunstigste Stillinger af Snittene. Indskrænker man sig til Benyttelsen af 2 Snit alene, vil man saaledes ikke længere turde sætte $f_1 = -f_2 = -r$, men maa mere almindeligt antage:

$$f_1 = -c_1 r\ ;\quad f_2 = +c_2 r\ ,$$

hvor c_1 og c_2 vel ere forskjellige, men i Regelen dog kun lidet afvigende fra Eenheden. Man faaer da ogsaa til Bestemmelsen af H og r de to fuldstændige Ligninger:

$$v_1 = \varphi(c_1 r)\left\{h_1 - H + c_1 r\right\}$$

$$q_2 v_1 + q_1 v_2 = \varphi(c_2 r)\left\{h_2 - H - c_2 r\right\}$$

hvis Opløsning giver:

$$H = \frac{c_2 h_1 + c_1 h_2}{c_1 + c_2} = \frac{h_1 + h_2}{2} + \frac{(c_1 - c_2)}{2} \cdot r\,; \quad r = \frac{h_2 - h_1}{c_1 + c_2} \quad \ldots \quad (26)$$

med de tilsvarende Feil:

$$\frac{c_1 q_1 v_2 + c_1 q_2 v_1}{(c_1 + c_2) \cdot \varphi(c_2 r)} + \frac{c_2 v_1}{(c_1 + c_2)\varphi(c_1 r)}\,; \quad \frac{q_1 v_2 + q_2 v_1}{(c_1 + c_2)\varphi(c_2 r)} - \frac{v_1}{(c_1 + c_2)\varphi(c_1 r)}$$

For den almindelige Feillov erholdes ved Udviklingen heraf, idet ϱc_1 og ϱc_2 betegnes respective med t_1 og t_2:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{r}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{t_1 + t_2} \cdot \sqrt{q_1(1-q_1)\, t_2^2\, e^{2t_1^2} + 2 q_1 q_2 (1-q_1)\, t_1 t_2\, e^{t_1^2 + t_2^2} + q_1 q_2 (1 - q_1 q_2)\, t_1^2\, e^{2t_2^2}} \\ R_1 &= \frac{\varrho r}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{t_1 + t_2} \cdot \sqrt{q_1(1-q_1)\, e^{2t_1^2} - 2 q_1 q_2 (1-q_1)\, e^{t_1^2 + t_2^2} + q_1 q_2 (1 - q_1 q_2)\, e^{2t_2^2}} \end{aligned}\right\} (27)$$

Men naar c_1 og c_2 ikke differere altfor stærkt vil det neppe nogensinde være nødvendigt at benytte sig af disse Udtryk. Man vil nemlig i saa Fald med tilstrækkelig Nøiagtighed kunne anvende Formel (24), idet q og t bestemmes for en Værdie af c, der svarer til Middeltallet af c_1 og c_2.

I alle de udviklede Formler ville Værdierne af q, q_1, q_2, $q_3 \ldots$ umiddelbart og med største Lethed bestemmes ved de tilsvarende Værdier af m, eller rettere af $\frac{m}{n}$. Derimod vil det ved Overgangen til c, eller til f og t, der begge afhænge directe af c, idet $f = \pm cr$ og $t = \varrho c$, være nødvendigt at gjøre Brug af de beregnede Tavler for Integralet: $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$. Simplest turde det være stedse at gjøre Overgangen fra q til c, idet q defineres ved:

$$q = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho c} e^{-t^2} dt$$

og idet man da i den første Halvdeel af Rækken faaer $q = 1 - 2\frac{m}{n}$, og i den sidste $q = 2\frac{m}{n} - 1$. Under Forudsætning af den almindelige Feillovs Gyldighed vil det saaledes være muligt at reducere det hele Apparat for Udførelsen af samtlige Regninger til følgende lille Tavle, der for Argumentet c, varierende fra $\frac{1}{10}$ til $\frac{1}{10}$, giver q udtrykt i Tusindedele.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	000	054	107	160	213	264	314	363	411	456
1	500	542	582	619	655	688	720	748	775	800
2	823	843	862	879	894	908	921	931	941	950
3	957	963	969	974	978	982	985	987	990	991
4	993	994	995	996	997	998	998	998	999	999

§ 12.

For at give en Prøve paa Methodens Anvendelse, der maaskee vil kunne bidrage til at stille dens sande Betydning i et klarere Lys, skal jeg laane et Exempel fra den tidligere berørte Artikel i 1ste Bind af det Medicinske Selskabs Skrifter. Jeg skal da hertil vælge den pag. 257—58 foretagne Bestemmelse af den 21- og 22-aarige værnepligtige Befolknings sande Middelhøide ved Hjælp af de paa Sessionerne i det første sjællandske Landmilice-District i Aaret 1845 udførte Høidemaalinger, der omfatte et Antal af 3089 Individer. Resultaterne af disse Maalinger foreligge i nedenstaaende Liste:

h	Antallet.	$\frac{m}{n}$	q	c
60	85,8	0,0858	0,8284	2,027
61	84,8	0,1706	0,6588	1,412
62	121,1	0,2917	0,4166	0,812
63	152,8	0,4445	0,1110	0,208
64	161,9	0,6064	0,2128	0,400
65	143,7	0,7501	0,5002	1,000
66	106,8	0,8569	0,7138	1,581
67	72,5	0,9294	0,8588	2,183
68	42,4	0,9718	0,9436	2,829
69	16,5	0,9883	0,9766	
70	6,5	0,9948	0,9896	
71	2,9	0,9977	0,9954	
72	1,6	0,9993	0,9986	
73	0,7	1,0000	1,0000	

Den første Colonne angiver i danske Tommer de forskjellige Værdier af h, der tjene til Bestemmelsen af samtlige individuelle Høider, idet man i den anden Colonne har anført i Tusindedele hvormange der af det samlede Antal have opnaaet Høider, som ligge mellem den paa samme Linie staaende og den næstforegaaende Værdie af h. Naar der saaledes til Exempel i 3die Linie findes Tallet 121,1, saa vil dette sige, at der af de maalte 3089 Individer vare $121{,}1 \cdot \frac{3089}{1000}$, eller ialt 374, hvis Høider faldt mellem 61 og 62 Tommer. I den paafølgende 3die Colonne, som fremkommer ved en successiv Opsummering af den anden, har jeg vedføiet den til hvert h svarende Værdie af $\frac{m}{n}$, og i den fjerde ligeledes Værdien af q. Den sidste Colonne indeholder endelig den tilsvarende, ved Hjælp af den ovenfor givne Tavle udledede, Værdie af c, forsaavidt denne kan have nogen Interesse, thi det vil let indsees, at Værdierne ved Rækkens Yderende neppe kunne fortjene synderlig Tillid. Med Hensyn til Berettigelsen af her at anvende den almindelige Feillov, maa jeg henvise til den citerede Artikel.

I nærværende Tilfælde vil man nu vistnok være villig til at indrømme, at det vilde være et vidtløftigt og møisommeligt Arbeide, selv om alle individuelle Høider vare fuldstændigt bekjendte, at udlede den sande Middelhøide ved en Summation af 3089 enkelte Høider. Men hertil kommer endnu, hvad der stærkt bør fremhæves, at dette Arbeide ikke engang lader sig udføre, idet man slet ikke kjender de virkelige individuelle Høider, som paa denne Maade skulde opsummeres. At hjelpe sig ud over Vanskeligheden ved at tillægge hver enkelt Gruppe en vis Middelhøide, vilde aabenbart være høist vilkaarligt og lede til et Resultat, om hvis Paalidelighed man ikke kunde fælde nogen sikker Dom. Og denne Udvei er endogsaa ganske afskaaret, idet der ved den første Gruppe kun simpelthen angives, at de til denne hørende Individer have Høider, der falde under 60 Tommer, medens det er fuldkommen ubekjendt hvilken

Middelhøide, der kunde være at tillægge dem. For den sædvanlige Fremgangsmaade vil Opgaven derfor være uløselig.

Men Intet er nu simplere end med største Nøiagtighed og næsten uden al Regning at udlede Værdien ved Hjælp af den her udviklede Methode. Den gunstigste Beliggenhed af de 2 Snit vil fremkomme ved at sætte:

$$h_1 = 62'' ; \quad h_2 = 65''$$

da de tilsvarende Værdier af c ligge nærmest ved Eenheden. Man faaer da:

$$c_1 = 0{,}812 ; \quad c_2 = 1{,}000$$

følgelig: $c_1 + c_2 = 1{,}812 ; \quad \frac{c_1 - c_2}{2} = -0{,}094$

altsaa: $r = \frac{3''}{1{,}812} = 1'',656$

$$H = 63'',5 - 0{,}094 \,.\, r = 63'',345$$

Og da $\frac{r}{\sqrt{n}}$ her er $= \frac{1'',656}{\sqrt{3089}} = 0'',0298$ vil det, naar man kun ønsker de sandsynlige Feil bestemte indtil Quinter nøie, og videre vil man dog neppe være fristet til at gaae, være mere end tilstrækkeligt i den meddeelte Tavle at søge de Værdier af (III) og (IV), der omtrent kunne svare til $c = 0{,}906$. Man faaer saaledes:

$$R = 0'',0298 \,.\, 1{,}11 = 0'',033$$

$$R_1 = 0'',0298 \,.\, \varrho \,.\, 1{,}77 = 0'',027$$

Til Sammenligning skal jeg endnu anføre et Par andre Bestemmelser af H og r, som erholdes ved andre Valg af h_1 og h_2.

$$h_1 = 61'' ; \quad h_2 = 65'' ; \quad H = 63'',342 ; \quad r = 1{,}658$$

$$h_1 = 61'' ; \quad h_2 = 66'' ; \quad H = 63'',360 ; \quad r = 1{,}671$$

$$h_1 = 60'' ; \quad h_2 = 67'' ; \quad H = 63'',370 ; \quad r = 1{,}663$$

Den sidste Bestemmelse af r vil ifølge § 10 være den skarpeste. Den giver $R_1 = 0'',018$.

§ 13.

Til Slutning skal jeg endnu ganske kort berøre en Opgave, der staaer i saa nær Forbindelse med Gjenstanden for nær værende Undersøgelse, at den neppe passende vil kunne forbigaaes. I en bekjendt Afhandling, der findes i *Lindenau's* »Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften», Band I, 1816, pag. 185 ff, har *Gauss* ganske almindeligt viist, hvorledes man paa forskjellige Maader kan bestemme Størrelsen r, naar der foreligger et System af n Feil, der antages at følge den almindelige Feillov. Det er da ogsaa herved bemærket, at naar samtlige Feil uden Hensyn til Tegn ordnes i en fortløbende Række efter deres numeriske Størrelse, saa maa selve Snittet gjennem Rækkens Midte umiddelbart bestemme r, og *Gauss* har tillige angivet den sandsynlige Feil ved denne Bestemmelse at være: $\frac{r}{\sqrt{n}} \cdot e^{\varrho^2}\sqrt{\frac{\pi}{8}}$. Denne sidste Sætning er imidlertid anført uden noget Beviis, idet der blot tilføies, at et saadant ikke paa det citerede Sted vil blive givet, hvilket er saa meget mere paafaldende som alle andre meddeelte Værdier af sandsynlige Feil ere ledsagede af udførlige Beviser for deres Rigtighed. Man turde maaskee herved ledes paa den Formodning, at den Udledelsesmaade, som er bleven benyttet af *Gauss*, neppe har egnet sig for en ganske kort Meddelelse. Langt senere har *Encke*, i den af ham forfattede Udsigt over de mindste Quadraters Methode, paany anført Sætningen (Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1834, pag. 294 ff), og nu tillige meddeelt et Beviis, der skyldes *Lejeune-Dirichlet*, men som uagtet dets Elegants dog neppe heller kan siges at være ganske kort. Det fortjener derfor at fremhæves, at den omhandlede Bestemmelse af r kun er en speciel Anvendelse af Udtrykket $f = \psi\left(\frac{m}{n}\right)$ og den dermed i Forbindelse staaende Formel (5), der selv i § 3 er bleven viist at være en simpel Følge af en bekjendt Sætning af Probabilitetsregningen. Kun maa det erindres, at da samtlige Feil ere behandlede som positive, maa $\varphi(f)$ i Formel (5) ombyttes med $2\varphi(f)$, hvor da tillige f kun betragtes som varierende fra 0 til $+\infty$. Man faaer da, idet R og R_1 her betyde det samme:

$$R_1 = \frac{r}{\sqrt{n}} \cdot e^{\varrho^2 c^2} \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{m}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)}$$

som atter for $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ og $f = r$, eller $c = 1$, giver:

$$R_1 = \frac{r}{\sqrt{n}} \cdot e^{\varrho^2} \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \frac{r}{\sqrt{n}} \cdot 0{,}7867$$

Men mærkeligt nok er det stedse blevet overseet, at denne Løsning kun er et meget specielt Tilfælde af den almindelige, der gives ved:

$$f = \psi\left(\frac{m}{n}\right) = cr, \quad \text{altsaa } r = \frac{f}{c}, \quad \text{og}$$

$$R_1 = \frac{r}{\sqrt{n}} \cdot \frac{e^{\varrho^2 c^2}}{c} \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{m}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)}$$

og at det saaledes er muligt ved en simpel Flytning af Snittet at erholde en langt skarpere Bestemmelse af r. Da $\frac{m}{n}$ her er selve Integralet: $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho c} e^{-t^2} dt$, altsaa $\frac{m}{n} = q$, vil man nemlig kunne skrive:

$$R_1 = \frac{\varrho r}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{q(1-q)}{t^2\, e^{-2t^2}}}$$

og Udtrykket bliver saaledes identisk med det tidligere, som i § 9 har været underkastet en udtømmende Drøftelse. Ifølge denne vil den gunstigste Stilling af Snittet svare til $q = \frac{m}{n} = 0{,}862$, der giver:

$$c = 2{,}20\,; \quad r = \frac{5}{11} f; \quad R_1 = \frac{r}{\sqrt{n}} \cdot 0{,}5905$$

og det er tillige viist, at en lille Afvigelse fra denne Stilling ikke vil udøve nogen kjendelig Indflydelse paa Nøiagtigheden. Fastsatte man til Exempel, at f skulde afskjære de største Feil indtil Sjetteparten af det hele Antal, altsaa $\frac{m}{n} = \frac{5}{6}$, saa erholdt man:

$$c = 2{,}05\,; \quad r = \frac{20}{41} f; \quad R_1 = \frac{r}{\sqrt{n}} \cdot 0{,}5928$$

hvor Forskjellen i Skarphed neppe kan tillægges nogen practisk Betydning.